Boa-colocação, auto-similaridade e estabilidade assintótica para as equações de Boussinesq em espaços de Morrey

Marcelo F. de Almeida

Departamento de Matemática
Universidade Federal de Pernambuco

IV ENAMA

12 de Novembro, 2010

Introdução

Estudamos a existência e comportamento assintótico de soluções brandas para as equações de Boussinesq em espaços de Morrey $\dot{\mathcal{L}}_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$.

Equações da Boussinesq

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \nu\Delta u + (u \cdot \nabla)u + \frac{1}{\rho}\nabla p = \kappa\,\theta f \; + F_1, \quad x \in \mathbb{R}^n \tag{1}$$

$$\operatorname{div}\, u = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n \tag{2}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} - \chi\Delta\theta + (u \cdot \nabla)\theta = F_2, \quad x \in \mathbb{R}^n \tag{3}$$

$$u(x,0) = u_0,\; \theta(x,0) = \theta_0 \text{ e } \operatorname{div}\, u_0 = 0. \quad x \in \mathbb{R}^n \tag{4}$$

Espaços de Morrey

Definição (Espaços de Morrey)

Sejam $p \in [1, \infty)$ *e* $0 \leq \lambda < n$. *Assuma que* $f \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^n)$. *Dizemos que* $f \in \dot{\mathcal{L}}_{p,\lambda}$, *se*

$$\int_{B(x_0,r)} |f(x)|^p dx \leq Cr^\lambda, \tag{5}$$

onde $B(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n; |x - x_0| < r\}$ *denota uma bola em* $\mathbb{R}^n$.

Inclusão

Se $1 \leq p_1 \leq p_2 < \infty$ e $\lambda = n(p_1 - p_2)/p_1 > 0$, então

$$L^{p_1} \subsetneq L^{p_1 \infty} \subsetneq \dot{\mathcal{L}}_{p_2,\lambda}.$$

Inclusão

Se $1 \leq p_1 \leq p_2 < \infty$ e $\lambda = n(p_1 - p_2)/p_1 > 0$, então

$$L^{p_1} \subsetneq L^{p_1 \infty} \subsetneq \dot{\mathcal{L}}_{p_2,\lambda}.$$

Funções homogêneas

Se $1 \leq p_1 < n/d$ e $0 < d < n$, então

$$|x|^{-d} \in \dot{\mathcal{L}}_{p,\mu}, \quad \mu = n - dp_1.$$

Inclusão

Se $1 \leq p_1 \leq p_2 < \infty$ e $\lambda = n(p_1 - p_2)/p_1 > 0$, então

$$L^{p_1} \subsetneq L^{p_1 \infty} \subsetneq \dot{\mathcal{L}}_{p_2,\lambda}.$$

Funções homogêneas

Se $1 \leq p_1 < n/d$ e $0 < d < n$, então

$$|x|^{-d} \in \dot{\mathcal{L}}_{p,\mu}, \quad \mu = n - dp_1.$$

Desigualdade de Hölder

Sejam $r, p, q \in [1, \infty)$. Se $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$ e $\frac{\mu}{r} = \frac{\lambda}{p} + \frac{\upsilon}{q}$, então

$$\|fg\|_{\dot{\mathcal{L}}_{r,\mu}} \leqslant \|f\|_{\dot{\mathcal{L}}_{p,\lambda}} \|g\|_{\dot{\mathcal{L}}_{q,\upsilon}}.$$

Não há um resultado de aproximação da identidade em espaços de Morrey $\dot{\mathcal{L}}_{p,\lambda}$, porque estes contêm funções singulares. Precisamos considerar o seguinte sub-espaço:

$$\tilde{\dot{\mathcal{L}}}_{p,\lambda} = \{\varphi \in \dot{\mathcal{L}}_{p,\lambda} \,;\, \|\tau_y \varphi - \varphi\|_{p,\lambda} \to 0 \ \ , y \to 0\},$$

onde $\tau_y \varphi(x) = \varphi(x - y)$ denota a translação em $\mathbb{R}^n$.

Não há um resultado de aproximação da identidade em espaços de Morrey $\dot{\mathcal{L}}_{p,\lambda}$, porque estes contêm funções singulares. Precisamos considerar o seguinte sub-espaço:

$$\tilde{\dot{\mathcal{L}}}_{p,\lambda} = \{\varphi \in \dot{\mathcal{L}}_{p,\lambda}\,;\, \|\tau_y\varphi - \varphi\|_{p,\lambda} \to 0 \quad, y \to 0\},$$

onde $\tau_y\varphi(x) = \varphi(x-y)$ denota a translação em $\mathbb{R}^n$.

Proposição

Assuma $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $0 \leq \psi \leq 1$, $\int \psi = 1$ *e* $\psi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n}\psi(\varepsilon^{-1}x)$. *Se* $\varphi \in \dot{\mathcal{L}}_{p,\lambda}$,

- $\varphi * \psi_\varepsilon \in \tilde{\dot{\mathcal{L}}}_{p,\lambda}$, *para todo* $\varepsilon > 0$.
- $\varphi \in \tilde{\dot{\mathcal{L}}}_{p,\lambda}$ *se e somente se* $\|\varphi * \psi_\varepsilon - \varphi\|_{p,\lambda} \to 0$ *quando* $\varepsilon \to 0$.

Proposição (Transformada de Riesz)

Se $1 < p < \infty$ e $0 \leq \lambda < n$, então os operadores R_j definidos por

$$\widehat{R_j f}(\xi) = \frac{i\xi_j}{|\xi|}\widehat{f}(\xi), \quad j = 1, \cdots, n$$

são contínuos em $\dot{\mathcal{L}}_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$.

Proposição (Transformada de Riesz)

Se $1 < p < \infty$ e $0 \leq \lambda < n$, então os operadores R_j definidos por

$$\widehat{R_j f}(\xi) = \frac{i\xi_j}{|\xi|}\widehat{f}(\xi), \quad j = 1, \cdots, n$$

são contínuos em $\dot{\mathcal{L}}_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$.

Proposição (Projetor de Leray)

Seja $\mathbb{P}$ o operador definido por

$$\widehat{(\mathbb{P}u)}_{jk}(\xi) = \left\{ \delta_{jk} - \frac{\xi_j \xi_k}{|\xi|^2} \right\} \hat{u}(\xi).$$

Se $1 < p < \infty$ e $0 \leq \lambda < n$, então $\mathbb{P}$ é contínuo em $\dot{\mathcal{L}}_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$.

Espaços Funcionais

Assuma que $1 < p, q, r < \infty$, $\mu = n - p$ e $\alpha = 1 - \frac{n-\mu}{q}$, $\beta = 1 - \frac{n-\mu}{r}$.

Espaços funcionais

$$H_p = BC((0,\infty); \dot{\mathcal{L}}^{\sigma}_{p,\mu} \times \dot{\mathcal{L}}_{p,\mu}),$$

$$H_{q,r} = \{[u,\theta] \in H_p : [t^{\frac{\alpha}{2}} u, t^{\frac{\beta}{2}} \theta] \in BC((0,\infty); \dot{\mathcal{L}}^{\sigma}_{q,\mu} \times \dot{\mathcal{L}}_{r,\mu})\}.$$

Espaços Funcionais

Assuma que $1 < p, q, r < \infty$, $\mu = n - p$ e $\alpha = 1 - \frac{n-\mu}{q}$, $\beta = 1 - \frac{n-\mu}{r}$.

Espaços funcionais

$$
\begin{aligned}
H_p &= BC((0,\infty); \dot{\mathcal{L}}^{\sigma}_{p,\mu} \times \dot{\mathcal{L}}_{p,\mu}),\\
H_{q,r} &= \{[u,\theta] \in H_p : [t^{\frac{\alpha}{2}} u, t^{\frac{\beta}{2}} \theta] \in BC((0,\infty); \dot{\mathcal{L}}^{\sigma}_{q,\mu} \times \dot{\mathcal{L}}_{r,\mu})\}.
\end{aligned}
$$

Normas

$$
\begin{aligned}
\left\| \begin{bmatrix} u \\ \theta \end{bmatrix} \right\|_{H_p} &= \sup_{t>0} \left\| \begin{bmatrix} u(\cdot,t) \\ \theta(\cdot,t) \end{bmatrix} \right\|_{p,\mu},\\
\left\| \begin{bmatrix} u \\ \theta \end{bmatrix} \right\|_{H_{q,r}} &= \left\| \begin{bmatrix} u \\ \theta \end{bmatrix} \right\|_{H_p} + \sup_{t>0} \left\| \begin{bmatrix} t^{\frac{\alpha}{2}} u(\cdot,t) \\ t^{\frac{\beta}{2}} \theta(\cdot,t) \end{bmatrix} \right\|_{q,\mu,r,\mu}.
\end{aligned}
$$

Formulação integral

Solução branda

Uma solução branda para o problema de valor inicial (1)-(4) é um vetor $[u, \theta] \in H_p$ satisfazendo

$$[u(t), \theta(t)] = e^{-tL}[u_0, \theta_0] + B([u, \theta], [u, \theta])(t) + T_f(\theta)(t)$$

e $[u(t), \theta(t)] \rightharpoonup [u_0, \theta_0]$ no sentido de distribuição, quando $t \to 0^+$.

Formulação integral

Solução branda

Uma solução branda para o problema de valor inicial (1)-(4) é um vetor $[u, \theta] \in H_p$ satisfazendo

$$[u(t), \theta(t)] = e^{-tL}[u_0, \theta_0] + B([u, \theta], [u, \theta])(t) + T_f(\theta)(t)$$

e $[u(t), \theta(t)] \rightharpoonup [u_0, \theta_0]$ no sentido de distribuição, quando $t \to 0^+$.

$$B([u, \theta], [v, \phi])(t) = -\int_0^t \nabla \cdot e^{-(t-s)L} \begin{bmatrix} \mathbb{P}(u \otimes v) \\ u\phi \end{bmatrix} (s) ds$$

Formulação integral

Solução branda

Uma solução branda para o problema de valor inicial (1)-(4) é um vetor $[u,\theta] \in H_p$ satisfazendo

$$[u(t),\theta(t)] = e^{-tL}[u_0,\theta_0] + B([u,\theta],[u,\theta])(t) + T_f(\theta)(t)$$

e $[u(t),\theta(t)] \rightharpoonup [u_0,\theta_0]$ no sentido de distribuição, quando $t \to 0^+$.

$$B([u,\theta],[v,\phi])(t) = -\int_0^t \nabla \cdot e^{-(t-s)L} \begin{bmatrix} \mathbb{P}(u \otimes v) \\ u\phi \end{bmatrix}(s)ds$$

$$T_f(\theta)(t) = \kappa \int_0^t e^{-(t-s)L} \begin{bmatrix} \mathbb{P}(\theta f) \\ 0 \end{bmatrix}(s)ds, \quad L \begin{bmatrix} u \\ \theta \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} \triangle u \\ \triangle \theta \end{bmatrix}.$$

Teorema 1

Seja $[u_0, \theta_0] \in \dot{\mathcal{L}}^{\sigma}_{p,\mu} \times \dot{\mathcal{L}}_{p,\mu}$. Assuma que $t^{\vartheta} f \in BC((0,\infty); (\dot{\mathcal{L}}_{b,\mu})^n)$ com $\vartheta = 1 - \frac{n-\mu}{2b}$, e denote $\|f\|_{\vartheta,(b,\mu)} = \sup_{t>0} t^{\vartheta} \|f(\cdot,t)\|_{b,\mu}$.

Teorema (Boa-colocação)

Se $\|f\|_{\vartheta,(b,\mu)}$ é suficientemente pequeno, então existe $0 < \varsigma < 1$, $\varepsilon > 0$ e $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que se $\|[u_0, \theta_0]\|_{p,\mu} \leqslant \delta$, o problema de valor inicial (1)-(4) tem uma solução branda global no tempo $[u, \theta] \in H_{q,r}$ com dado inicial $[u_0, \theta_0]$. Além disso, a solução $[u, \theta]$ é única na bola fechada $B(0, \frac{2\varepsilon}{1-\varsigma}) \subset H_{q,r}$.

Teorema 1

Teorema (Dependência contínua no campo f)

Assuma que $\{[u_m,\theta_m]\}_{m\in\mathbb{N}}$ *e* $[u,\theta]$ *são soluções de* (1)-(4) *com mesmo dado inicial* $[u_0,\theta_0]$ *e respectivos campos* $\{f_m\}$ *e* f*. Se* $f_m \longrightarrow f$ *na norma* $\|f\|_{\vartheta,(b,\mu)}$*, então* $[u_m,\theta_m] \longrightarrow [u,\theta]$ *em* $H_{q,r}$.

Teorema 1

Teorema (Dependência contínua no campo f)

Assuma que $\{[u_m, \theta_m]\}_{m \in \mathbb{N}}$ e $[u, \theta]$ são soluções de (1)-(4) com mesmo dado inicial $[u_0, \theta_0]$ e respectivos campos $\{f_m\}$ e f. Se $f_m \longrightarrow f$ na norma $\|f\|_{\vartheta,(b,\mu)}$, então $[u_m, \theta_m] \longrightarrow [u, \theta]$ em $H_{q,r}$.

Teorema (Problema de Bénard)

Seja $n \geq 3$ e $p > 2$. Assuma que o coeficiente de expansão do volume κ é suficientemente pequeno. Então podemos considerar o caso físico $f(x) = -G\frac{x}{|x|^3}$, isto é, o campo gravitacional newtoniano.

Corolário (Auto-similaridade)

Assuma as hipóteses do Teorema 1. Assuma que $[u_0, \theta_0] \in \dot{\mathcal{L}}^{\sigma}_{p,\mu} \times \dot{\mathcal{L}}_{p,\mu}$ *é um vetor homogêneo de grau* -1 *e o campo gravitacional satisfaz*

$$f(x,t) = \lambda^2 f(\lambda x, \lambda^2 t),$$

para todo $\lambda > 0$, $t > 0$ *e* $x \in \mathbb{R}^n$. *Então a solução* $[u, \theta]$ *obtida no Teorema 1 é uma solução auto-similar para o PVI (1)-(4), isto é,*

$$[u(x,t), \theta(x,t)] = \lambda[u(\lambda x, \lambda^2 t), \theta(\lambda x, \lambda^2 t)].$$

Teorema 2

Teorema

Assuma as hipóteses do Teorema 1. Sejam $[u, \theta]$ *e* $[v, \varphi]$ *soluções globais para* (1)-(4) *com respectivos dados iniciais* $[u_0, \theta_0]$ *e* $[v_0, \varphi_0]$*, e correspondentes campos de vetores* f *e* w*. Além disto, assuma que*

$$\lim_{t \to \infty} t^{\vartheta} \| f(\cdot, t) - w(\cdot, t) \|_{b,\mu} = 0. \tag{6}$$

Então

$$\lim_{t \to \infty} \left\| \begin{bmatrix} u(t) - v(t) \\ \theta(t) - \varphi(t) \end{bmatrix} \right\|_{p,\mu} = 0 \tag{7}$$

se e somente se

$$\lim_{t \to \infty} \left\| \begin{bmatrix} e^{t\triangle}(u_0 - v_0) \\ e^{t\triangle}(\theta_0 - \varphi_0) \end{bmatrix} \right\|_{p,\mu} = 0. \tag{8}$$

Teorema 2

Teorema

Além disso,

$$\lim_{t\to\infty}\left\|\begin{bmatrix} t^{\frac{\alpha}{2}}(u(t)-v(t)) \\ t^{\frac{\beta}{2}}(\theta(t)-\varphi(t)) \end{bmatrix}\right\|_{q,\mu,r,\mu} = 0 \tag{9}$$

se e somente se

$$\lim_{t\to\infty}\left\|\begin{bmatrix} t^{\frac{\alpha}{2}}e^{t\triangle}(u_0-v_0) \\ t^{\frac{\beta}{2}}e^{t\triangle}(\theta_0-\varphi_0) \end{bmatrix}\right\|_{q,\mu,r,\mu} = 0. \tag{10}$$

Corolário (Bacia Atratora)

Assuma as hipóteses do Teorema 1. Seja $b = \frac{p}{2}$, $[u_0, \theta_0]$ *um vetor homogêneo de grau* -1 *e* $[\phi, \psi] \in C^{\infty}_{0,\sigma} \times C^{\infty}_{0}$. *Assuma que* $[u, \theta]$ *e* $[v, \varphi]$ *são soluções brandas com respectivos dados iniciais* $[u_0, \theta_0]$ *e* $[u_0 + \phi, \varphi_0 + \psi]$*, e correspondentes campos de vetores* $f(x,t) = -G\frac{x}{|x|^3}$ *e* $w(x,t)$*, tal que*

$$\lim_{t \to \infty} \| w(\cdot, t) - G\frac{x}{|x|^3} \|_{b,\mu} = 0. \tag{11}$$

Então, a solução pertubada $[v, \varphi]$ *é atraída para a solução auto-similar* $[u, \theta]$ *no sentido de* (7)-(8) *e* (9)-(10).

Cannon, J. R., DiBenedetto, E., *The initial value problem for the Boussinesq equations with data in* L^p, Approximation methods for Navier-Stokes problems, Lecture Notes in Math. 771 (1980), 129–144.

Ferreira, L.C.F., Villamizar-Roa, E.J., Existence of solutions to the convection problem in a pseudomeasure-type space, *Proc. R. Soc. Lond. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci.* 464 (2008), 1983-1999.

Karch, G., Prioux, N., Self-similarity in viscous Boussinesq equations. *Proc. Amer. Math. Soc.* 136 (2008), 879-888.

Ferreira, L.C.F., Villamizar-Roa, On the stability problem for the Boussinesq equations in weak-L^p spaces, *Commun. Pure Appl. Anal.* 9 (2010), 667 - 684.